

## Prédiction des états d'équilibre d'un champ thermique en turbulence homogène

## Prediction of equilibrium states of a thermal field in homogeneous turbulence

Mounir Bouzaiane<sup>a,b,\*</sup>, Taieb Lili<sup>a</sup>

<sup>a</sup> *Laboratoire de Mécanique des Fluides, Faculté des Sciences de Tunis, Campus Universitaire 1068 Tunis, Tunisie*

<sup>b</sup> *B.P. 12 Tunis Chabbi, 1089 Mont-fleury Tunis, Tunisie*

Reçu le 26 octobre 2000; accepté le 12 octobre 2001

---

### Abstract

The aim of this work is to compare the prediction of several second order models in a thermal field of two cases of homogeneous turbulence. The second order models retained for this work are the classic models of Launder, Reece and Rodi [J. Fluid Mech. 68 (1975) 537–576], and the elaborate one of Launder et al. [Accommodating the effects of high strain rates in the modeling the pressure strain correlation, 1987, The University of Manchester of Science and Technology, March T.F.D/87/5/; A model for the pressure scalar gradient correlation and its application to homogeneous and inhomogeneous shear flow, Turbulent Shear Flow 7, Stanford University, USA, 1989, pp. 12–1–12–6; M. Hallback, D.S. Hennigson, A.V. Johansson, P.H. Alfredsson (Eds.), Turbulence Transition Modelling, Dordrecht, 1996] and Lumley and Shih [Second order modeling of passive scalar turbulent flow, Ph.D. Thesis, Cornell University, New York, 1984; Second order modeling of scalar in turbulent shear flow, in: Center of Turbulent Research 27th Aerospace Meeting, January 9–12, Nevada, 1989; M. Hallback, D.S. Hennigson, A.V. Johansson, P.H. Alfredsson (Eds.), Turbulence Transition Modeling, Dordrecht, 1996].

The main objective is the prediction of the equilibrium states of dimensionless parameters characterizing the two homogeneous flows considered. This comparison is referred to the experimental results of Sirivat and Warhaft [J. Fluid Mech. 128 (1983) 323–345] and the Large eddy simulations of Chasnov [Phys. Fluids 6 (2) (1994) 1036–1051] in the case of the decaying of homogeneous turbulence, to the experimental results of Tavoularis and Corrsin [J. Fluid Mech. 104 (1981) 311–347], and the numerical simulation of Rogers et al. [J. Fluid Mech. 203 (1989) 77–101] in the case of homogeneous sheared turbulence submitted to a thermal field.

A Runge–Kutta method is used for the integration of the modeled differential equations and has shown that the elaborate models of Launder et al. [Accommodating the effects of high strain rates in the modeling the pressure strain correlation 1987, The University of Manchester of Science and Technology, March T.F.D/87/5/; A model for the pressure scalar gradient correlation and its application to homogeneous and inhomogeneous shear flow, Turbulent Shear Flow 7, Stanford University, USA, 1989, pp. 12–1–12–6; M. Hallback, D.S. Hennigson, A.V. Johansson, P.H. Alfredsson (Eds.), Turbulence Transition Modelling, Dordrecht, 1996] ensure the best approximation of the equilibrium states observed experimentally and from the direct numerical simulation. © 2002 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

### Résumé

Dans ce travail nous comparons et nous évaluons les prédictions de différents modèles au second ordre dans deux cas de turbulence homogène associée à des champs thermiques. L'objet essentiel est la prédiction des états d'équilibre des grandeurs adimensionnelles dans deux cas d'écoulement turbulent. Nous retenons les modèles classiques [J. Fluid Mech. 68 (1975) 537–576], les modèles de Shih et Lumley [Second order modeling of passive scalar turbulent flow, Ph.D. Thesis, Cornell University, New York, 1984; Second order modeling of scalar in turbulent shear flow, in : Center of Turbulent Research 27th Aerospace Meeting, January 9–12, Nevada, 1989; M. Hallback, D.S. Hennigson, A.V. Johansson, P.H. Alfredsson (Eds.), Turbulence Transition Modeling, Dordrecht, 1996] et ceux de Launder et al. [Accommodating the effects of high strain rates in the modeling the pressure strain correlation, 1987, The University of Manchester of Science and Technology, March T.F.D/87/5/; A model for the pressure scalar gradient correlation and its application to homogeneous and inhomogeneous shear flow, Turbulent Shear Flow 7, Stanford University, USA, 1989, pp. 12–1–12–6; M. Hallback, D.S. Hennigson, A.V. Johansson, P.H. Alfredsson (Eds.), Turbulence Transition Modelling, Dordrecht, 1996]. Nous nous basons dans cette étude, sur les résultats expérimentaux de Sirivat et Warhaft [J. Fluid Mech. 128 (1983) 323–345] et ceux de simulations aux grandes échelles de Chasnov

[Phys. Fluids 6 (2) (1994) 1036–1051] pour le cas d'une turbulence isotrope et les résultats expérimentaux de Tavoularis et Corrsin [J. Fluid Mech. 104 (1981) 311–347] et ceux de simulations numériques directes de Rogers et al. [J. Fluid Mech. 203 (1989) 77–101] en turbulence homogène cisailée associée à un champ thermique. Une intégration numérique des équations modélisées par la méthode de Runge–Kutta d'ordre 4, a montré que le modèle de Launder et al. [Accommodating the effects of high strain rates in the modeling the pressure strain correlation 1987, The University of Manchester of Science and Technology, March T.F.D/87/5; A model for the pressure scalar gradient correlation and its application to homogeneous and inhomogeneous shear flow, Turbulent Shear Flow 7, Stanford University, USA, 1989, pp. 12–1–12–6; M. Hallback, D.S. Hennigson, A.V. Johansson, P.H. Alfredsson (Eds.), Turbulence Transition Modelling, Dordrecht, 1996] est celui qui assure la meilleure approximation des valeurs d'équilibre expérimentales ou de simulations numériques. © 2002 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

**Keywords:** Homogeneous turbulence; Second order models; Thermal field; Dimensionless parameters; Asymptotic behaviour; Equilibrium states; Fixed points

**Mots-clés :** Turbulence homogène ; Modèles au second ordre ; Champ thermique ; Grandeurs adimensionnelles ; Comportement asymptotique ; États d'équilibre ; Points fixes

## 1. Introduction

L'étude et la prédiction des états d'équilibre en turbulence homogène a été l'un des outils les plus efficaces pour l'évaluation des modèles au second ordre et en particulier les modèles relatifs aux corrélations pression-déformation et ceux de l'équation d'évolution du taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente. Dans ce cadre, l'étude menée par Speziale et Mhuiris [1] constitue une référence essentielle pour la prédiction des valeurs d'équilibre en turbulence homogène cisailée.

L'étude des états d'équilibre du retour à l'isotropie d'une turbulence homogène initialement anisotrope, a permis à Sarkar et Speziale [2] d'imposer des contraintes restrictives sur le domaine de variation des constantes numériques associées au modèle du terme de retour à l'isotropie de la corrélation pression-déformation. Elle nous [3] a permis aussi dans un précédent travail qui consistait à étudier le retour à l'isotropie d'un champ thermique d'une turbulence homogène initialement anisotrope, de limiter le domaine de variation des constantes du modèle que nous avons proposé pour le terme de retour à l'isotropie de la corrélation pression-température.

Dans ce travail nous étudions les états d'équilibre d'un champ thermique d'une turbulence homogène. Nous proposons d'évaluer les prédictions des valeurs d'équilibre caractérisant deux champs thermiques de turbulences homogènes à l'aide des modèles au second ordre. Ces modèles concernent les termes de corrélation pression-température ainsi que l'équation d'évolution de la dissipation de la variance de la température. Les modèles retenus sont les modèles classiques de Launder, Reece et Rodi (LRR 1975) [4] (voir annexe), les modèles élaborés de Shih et Lumley [5–8] et ceux de Launder et al. [9–11].

Deux types d'écoulements turbulents sont considérés, le premier est celui réalisé expérimentalement par Sirivat et Warhaft [12] et concerne l'évolution du champ ther-

mique d'une turbulence homogène cinématiquement isotrope. Ces résultats expérimentaux ont montré que l'évolution du champ thermique est caractérisée par un comportement asymptotique de trois grandeurs adimensionnelles qui sont respectivement le coefficient de corrélation associé au flux thermique turbulent, le rapport production thermique/dissipation thermique et le rapport des temps caractéristiques cinématique et thermique. Le comportement de ces grandeurs adimensionnelles est aussi confirmé par les solutions analytiques de Chasnov [13] ainsi que par ses simulations aux grandes échelles. Une comparaison des résultats prédits par les différents modèles aux résultats expérimentaux et de simulation aux grandes échelles en turbulence isotrope fera l'objet de la troisième partie de ce travail. La quatrième partie de ce travail, sera consacrée au deuxième écoulement. Il s'agit du cas de turbulence homogène cisailée associée à un champ thermique. Nous faisons référence aux résultats expérimentaux de Tavoularis et Corrsin [14] qui correspondent à l'évolution d'une turbulence homogène évoluant en aval de deux grilles cinématique et thermique produisant respectivement un cisaillement et un gradient de température constants. Ces résultats expérimentaux ont montré l'existence de valeurs d'équilibres de certaines grandeurs adimensionnelles quand le temps adimensionnel  $\tau = St$  devient grand. Ce sont les composantes  $b_{11}$ ,  $b_{22}$ ,  $b_{12}$  du tenseur anisotrope de Reynolds ainsi que le rapport  $\frac{\varepsilon}{K S}$  qui caractérisent le champ cinématique. Le champ thermique de cette turbulence, quant à lui, est caractérisé par le comportement asymptotique d'autre grandeurs adimensionnelles quand le temps  $\tau$  devient grand. Il s'agit des coefficients de corrélation  $\frac{u_i \theta}{u_i' \theta'}$  associés aux flux thermiques

turbulents, du rapport des flux thermiques turbulents  $\frac{\overline{\theta u_1}}{\overline{\theta u_2}}$  et du nombre de Prandtl turbulent  $\frac{\overline{u_1 u_2 \alpha}}{\overline{\theta u_2 S}}$ . Les simulations numériques de Rogers et al. [18] relatives au type d'écoulement sus-mentionné, ont montré en plus un comportement asymptotique de la grandeur adimensionnelle  $B = \frac{q'}{S} / \frac{\theta'}{\alpha}$ , ( $q' = \sqrt{q^2}$ ,  $\theta' = \sqrt{\theta^2}$ ), et du rapport des temps caractéristiques cinématique et thermique  $r = \frac{q'^2}{\varepsilon} \frac{\varepsilon \theta}{\theta^2}$ . Une prédiction

\* Correspondance et tirés à part.

Adresse e-mail : mounir.bouzaiane@fsb.rnn.tn (M. Bouzaiane).

**Nomenclature**

$b_{ij}$	composantes du tenseur d'anisotropie de Reynolds $b$ . $b_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{q^2} - \frac{\delta_{ij}}{3}$	$\frac{\overline{u_i u_j}}{u_i \theta}$	composantes du tenseur de Reynolds .. $m^2 \cdot s^{-2}$ composantes du flux thermique turbulent ..... $m \cdot s^{-1} \cdot K$
$D_{ij}$	composantes du tenseur symétrique positif $D$ . $D_{ij} = \overline{\theta u_i \theta u_j} - \overline{\theta^2} \overline{u_i u_j}$ ..... $K^2 \cdot m^2 \cdot s^{-2}$	$x_i$	système de coordonnées cartésiennes ( $i = 1, 2, 3$ ) ..... $m$
$K$	énergie cinétique turbulente $q^2 = 2K = \overline{u_i u_i}$ ..... $m^2 \cdot s^{-2}$	<b>Symboles grecs</b>	
$p$	fluctuation de la pression ..... $N \cdot m^{-2}$	$\delta_{ij}$	symbole de Kronecker
$r$	rapport des temps caractéristiques = $\frac{q^2}{\varepsilon} \frac{\varepsilon_\theta}{\theta^2}$	$\theta$	fluctuation de la température ..... $K$
$S$	cisaillement moyen ..... $s^{-1}$	$\overline{\theta^2}$	variance de la fluctuation de la température. $K^2$
$t$	temps ..... $s$	$\theta'$	racine carrée de la variance de la fluctuation de la température ..... $K$
$T$	température moyenne ..... $K$	$\varepsilon$	dissipation de l'énergie cinétique turbulente ..... $m^2 \cdot s^{-3}$
$T_{,i}$	gradient de la température moyenne, noté $\alpha$ ..... $K \cdot m^{-1}$	$\varepsilon_\theta$	dissipation de la variance de la fluctuation de la température ..... $K^2 \cdot s^{-1}$
$U_i$	$i$ ème composante de la vitesse moyenne $m \cdot s^{-1}$	$\varepsilon_{i\theta}$	dissipation du flux thermique turbulent ..... $K \cdot m \cdot s^{-2}$
$u_i$	$i$ ème composante de la fluctuation de la vitesse ..... $m \cdot s^{-1}$	$\tau$	temps adimensionnel = $St$
$U_{i,j}$	gradient de la vitesse moyenne ..... $s^{-1}$		

des états d'équilibre de ces grandeurs adimensionnelles, à partir des modèles au second ordre, fera l'objet de la quatrième partie de ce travail.

Dans la deuxième partie de ce travail, nous présentons les équations générales décrivant une turbulence homogène soumise à des gradients moyens de vitesse et de température.

**2. Équations générales**

Nous nous proposons d'étudier les états d'équilibre d'une turbulence homogène associée à un champ thermique. Une telle turbulence est décrite dans le cadre d'une modélisation conventionnelle au second ordre par les équations d'évolution suivantes :

$$\frac{d}{dt} \overline{u_i u_j} = P_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{\theta u_i} = P_{i\theta} + \Phi_{i\theta} - \varepsilon_{i\theta} \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} K = P - \varepsilon \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{\theta^2} = 2P_\theta - 2\varepsilon_\theta \quad (4)$$

les termes notés  $P$  sont des termes de production dus aux gradients cinématiques  $U_{i,j}$  et thermiques  $T_{,k}$  moyens :

$$\begin{aligned} P &= -\overline{u_i u_k} U_{i,k} \\ P_{ij} &= -\overline{u_i u_k} U_{j,k} - \overline{u_j u_k} U_{i,k} \\ P_{i\theta} &= -\overline{u_i u_k} T_{,k} - \overline{u_k \theta} U_{i,k} \\ P_\theta &= -\overline{u_k \theta} T_{,k} \end{aligned} \quad (5)$$

les termes notés  $\Phi$  sont les termes de corrélation faisant intervenir la fluctuation de pression ;  $\Phi_{ij}$  est le terme de corrélation pression-déformation et  $\Phi_{i\theta}$  est le terme de corrélation pression-température :

$$\begin{aligned} \Phi_{ij} &= -\frac{p}{\rho} (u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \Phi_{i\theta} &= -\frac{p}{\rho} (\theta_{,i}) \end{aligned} \quad (6)$$

et enfin  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\varepsilon_{i\theta}$  et  $\varepsilon_\theta$  désignent les dissipations dues aux effets moléculaires.

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \nu \overline{u_{i,k} u_{i,k}} \\ \varepsilon_{ij} &= \nu \overline{u_{i,k} u_{j,k}} \\ \varepsilon_{i\theta} &= (\nu + \lambda) \overline{u_{i,k} \theta_{,k}} \\ \varepsilon_\theta &= \lambda \overline{\theta_{,k} \theta_{,k}} \end{aligned} \quad (7)$$

$\nu$  est la viscosité cinématique et  $\lambda$  la diffusivité du fluide considéré.

A grands nombres de Reynolds et de Péclet, l'isotropie du processus de dissipation conduit simplement à :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij}, \quad \varepsilon_{i\theta} \simeq 0 \quad (8)$$

**3. États d'équilibre d'un champ thermique d'une turbulence homogène isotrope**

Nous considérons le cas d'un écoulement turbulent de vitesse moyenne  $U_1$  selon la direction longitudinale  $x_1$ , associé à un champ thermique présentant un gradient moyen de température selon la direction verticale  $x_3$ . La description de

l'écoulement se réduit aux équations d'évolution de la composante  $\overline{u_3^2}$  des tensions de Reynolds, du flux thermique turbulent  $\overline{u_3\theta}$ , de la variance de la température  $\overline{\theta^2}$  et des dissipations  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_\theta$ . Nous notons que de telles équations décrivent le cas de turbulence homogène réalisée expérimentalement par Sirivat et Warhaft [12].

Dans ces expériences, Sirivat et Warhaft [12] ont étudié l'évolution de la variance de la température et du flux thermique en turbulence cinématique pratiquement isotrope en produisant un gradient moyen de température  $\alpha = \frac{dT}{dx_3}$  par deux méthodes expérimentales différentes. Ils ont constaté que le rapport production thermique à la dissipation thermique  $\frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta} = -\frac{u_3\theta\alpha}{\varepsilon_\theta}$  tend vers une valeur d'équilibre de l'ordre de 1,5 pour les deux expériences. Un comportement pareil caractérise aussi le rapport des temps caractéristiques cinématique et thermique  $\frac{q^2}{\varepsilon} \frac{\varepsilon_\theta}{\theta^2}$  ainsi que le coefficient de corrélation associé au flux thermique turbulent; ils tendent vers des valeurs d'équilibre qui sont indépendantes de la méthode de génération du gradient moyen de température variant dans les deux expériences.

Chasnov [13] a confirmé les comportements asymptotiques de ces grandeurs adimensionnelles notons les :  $\rho_1 = \frac{\overline{u_3\theta}}{\overline{u_3^2}\theta}$ ,  $\rho_2 = -\frac{\overline{u_3\theta}\alpha}{\varepsilon_\theta}$  et  $\rho_3 = \frac{q^2}{\varepsilon} \frac{\varepsilon_\theta}{\theta^2}$ , et a montré à partir des résultats de simulation aux grandes échelles et des solutions analytiques, que ces grandeurs adimensionnelles sont reliées par la relation :

$$\frac{q^2}{\varepsilon} \frac{\varepsilon_\theta}{\theta^2} = \frac{n_\theta}{n_u} \left( 1 + \frac{\overline{u_3\theta}\alpha}{\varepsilon_\theta} \right)^{-1} \quad (9)$$

qui s'écrit aussi

$$\rho_3 = \frac{n_\theta}{n_u} (1 - \rho_2)^{-1} \quad (10)$$

où  $n_u$  et  $n_\theta$  sont les exposants des évolutions temporelles de l'énergie cinétique et de la variance de la température. Nous proposons à ce niveau du travail de prédire les états d'équilibre de ces grandeurs adimensionnelles à l'aide des modèles au second ordre. Nous retenons les modèles classiques de Launder, Reece et Rodi [4], les modèles de Shih et Lumley [5–8] ainsi que les modèles de Launder et al. [9–11]. Ce sont les modèles les plus utilisés qui assurent la fermeture des équations d'évolution décrivant ce cas de turbulence homogène.

Dans le cas d'une turbulence isotrope (composantes nulles du tenseur anisotrope de Reynolds,  $b_{ij} = II_b = III_b = 0$ ), les modèles de Craft et Launder [9–11] et ceux de Shih et Lumley [5–8] se ramènent pratiquement au modèle classique [4] à des valeurs numériques près. La seule différence entre ces modèles se situe au niveau des équations des dissipations  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_\theta$ .

En introduisant tout d'abord les modèles classiques de Launder, Reece et Rodi [4] dans les équations d'évolution des grandeurs  $\overline{u_3^2}$ ,  $\overline{u_3\theta}$  et en modélisant les équations d'évolution des dissipations  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_\theta$ , nous obtenons le système différentiel suivant :

$$\frac{d}{dt} \overline{u_3^2} = -\frac{2}{3} \varepsilon \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{u_3\theta} = -\overline{u_3^2} \frac{dT}{dx_3} - C_1 \frac{\varepsilon}{K} \overline{u_3\theta} \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{\theta^2} = -2\overline{u_3\theta} \frac{dT}{dx_3} - 2\varepsilon_\theta \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt} \varepsilon = -C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt} \varepsilon_\theta = -C_{d3} \frac{\varepsilon_\theta}{\theta^2} \overline{u_3\theta} \frac{dT}{dx_3} - 2C_{d2} \frac{\varepsilon}{K} \varepsilon_\theta - C_{d1} \frac{\varepsilon_\theta^2}{\theta^2}. \quad (15)$$

On s'oriente maintenant à l'écriture des équations d'évolution des grandeurs adimensionnelles thermiques caractérisant cet écoulement turbulent. (Nous précisons ici que cette démarche a été adoptée pas Speziale et Mhuiris. [1] pour le champ cinématique d'une turbulence homogène cisailée.) Le groupement de ces équations d'évolution sous une forme adimensionnelle permet d'obtenir celles des grandeurs adimensionnelles thermiques  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $\rho_3$  :

$$\frac{d}{d\tau} \rho_1 = -2C_1 \rho_1 + \rho_1 (1 + \rho_3 - \rho_2 \rho_3) + \frac{\rho_2 \rho_3}{\rho_1} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \rho_2 = & -2C_1 \rho_2 + \rho_2 (-C_{d3} \rho_2 \rho_3 + C_{d1} \rho_3 + 2C_{d2}) \\ & + \rho_3 \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^2 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \rho_3 = & \rho_3 (2(C_{\varepsilon 2} - 1 - C_{d2}) + (2 - C_{d1}) \rho_3 \\ & + (C_{d3} - 2) \rho_2 \rho_3) \end{aligned} \quad (18)$$

où  $d\tau = \frac{\varepsilon}{q^2} dt$ .

Ce système différentiel est soumis aux conditions initiales expérimentales de Sirivat et Warhaft [12] :

$$(\rho_1)_0 = -0,5 \quad (\rho_2)_0 = 1,2 \quad (\rho_3)_0 = 1,1 \quad (19)$$

Une écriture des équations d'évolution des grandeurs adimensionnelles citées est aussi effectuée pour les modèles de Shih et Lumley [5–8], Launder et al. [9–11]. L'isotropie de la turbulence dans ce cas, se traduit par des valeurs nulles de  $b_{ij}$  et de ses invariants  $II_b$  et  $III_b$  et ensuite, par des formes pratiquement semblables des équations. Nous nous limitons dans cette présentation à l'écriture des équations adimensionnelles des grandeurs thermiques relatives au modèle classique [4] (voir Annexe A).

En effectuant la résolution des systèmes différentiels relatifs aux trois modèles de turbulence retenus, par la méthode de Runge–Kutta d'ordre 4 et en la poursuivant vers des intervalles de temps suffisamment grands, nous constatons que les évolutions des grandeurs adimensionnelles  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  et  $\rho_3$  se stabilisent aux valeurs d'équilibre présentées au Tableau 1.

Les résultats issus de cette résolution numérique nous permettent de constater que les valeurs correspondant au modèle de Launder et al. [9,10] sont celles qui assurent la meilleure prédiction des valeurs d'équilibre des grandeurs

Tableau 1

États d'équilibre en turbulence homogène isotrope

Table 1

Equilibrium states in homogeneous isotropic turbulence

Modèles	$(\rho_1)_\infty$	$(\rho_2)_\infty$	$(\rho_3)_\infty$
LRR 75	-0,976	4,69	1,65
Lumley et al.	-0,849	...	0,0
Launder et al.	-0,728	1,61	1,3
Expérience SW 83	-0,7	1,5	1,4
SGE Chasnov 94	-0,7	1,3	1,0

adimensionnelles  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  et  $\rho_3$ , relatives aux expériences de Sirivat et Warhaft [12].

La Fig. 1 montre les évolutions du coefficient de corrélation  $\rho_1 = \frac{u_3 \theta}{u_3' \theta'}$  associé au flux thermique turbulent  $\overline{\theta u_3}$ . Les résultats des trois modèles prédisent des valeurs d'équilibre ne dépassant pas l'unité. Ce constat est un peu surprenant pour le modèle classique [4] qui n'est pas soumis à des hypothèses strictes de réalisabilité [15,16], du type  $D_{11} = \overline{u_1 \theta^2} - \overline{u_1^2 \theta^2} \geq 0$ , à laquelle est soumis le modèle de Lumley et al. [5–8] montrant une sous-estimation d'environ 20 % de la valeur expérimentale de Sirivat et Warhaft [12] ou celle de Chasnov [13].

La Fig. 2 montre également que le modèle de Launder et al. [9–11], est celui qui assure la meilleure prédiction des états d'équilibre expérimentaux de Sirivat et Warhaft [12] ou de simulation aux grandes échelles de Chasnov [13]. Le modèle classique de LRR 75 [4] montre une croissance rapide avant de se stabiliser en une valeur d'équilibre très grande par rapport à la valeur expérimentale. L'évolution prédite par le modèle de Lumley [5–8] pour cette grandeur adimensionnelle n'a pas présenté un comportement asymptotique. On constate, au contraire, une croissance de cette grandeur adimensionnelle qui atteint 11,5 pour  $\tau = 0,8$ . On conclut que le modèle de Lumley et al. [5–8] a présenté une défaillance dans le cas d'une turbulence isotrope. Les modèles des équations de dissipation pourraient être derrière une telle défaillance. Un calage des coefficients des modèles des équations des dissipations  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_\theta$  en rapport avec les résultats expérimentaux [12] pourrait, à notre avis, apporter une amélioration aux résultats.

La même conclusion est aussi valable pour les évolutions du rapport des temps caractéristiques cinématique et thermique  $r = \frac{q^2}{\varepsilon} \frac{\varepsilon_\theta}{\theta^2}$  présentées sur la Fig. 3 où le modèle de Launder et al. [9–11] a prédit les meilleurs résultats. En résultat de cette première application, nous concluons que les modèles de Launder et al. [9–11] sont ceux qui assurent la meilleure prédiction des valeurs d'équilibre des grandeurs adimensionnelles thermiques relatives aux expériences de Sirivat et Warhaft [12].

Nous indiquons aussi que l'introduction des grandeurs adimensionnelles dans les équations d'évolution des grandeurs turbulentes,  $\overline{\theta^2}$  et  $\varepsilon_\theta$ , permet de les écrire sous les formes suivantes :

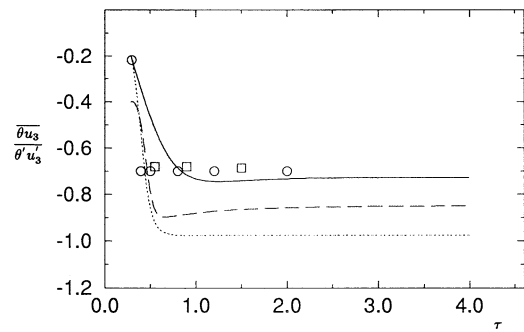


Fig. 1. Évolution du coefficient de corrélation  $\frac{\overline{\theta u_3}}{\overline{\theta'^2} \overline{u_3'^2}}^{1/2}$  : ... modèle de LRR ; -- modèle de Lumley et al. ; — modèle de Launder et al. ; symboles  $\circ$  expériences de Sirivat et Warhaft ;  $\square$  SGE de Chasnov.

Fig. 1. Evolution of the correlation coefficient  $\frac{\overline{\theta u_3}}{\overline{\theta'^2} \overline{u_3'^2}}^{1/2}$  : ... model of LRR ; -- model of Lumley et al. ; — model of Launder et al. ; symbols  $\circ$  experiments of Sirivat and Warhaft ;  $\square$  LES of Chasnov.

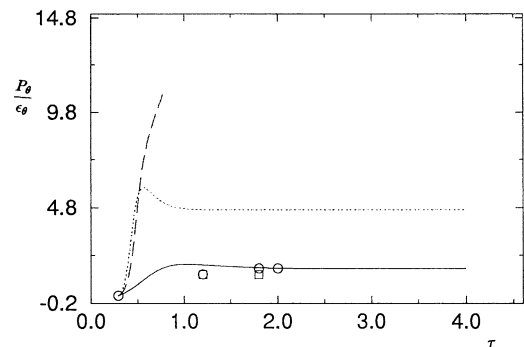


Fig. 2. Évolution du rapport adimensionnel  $\frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta}$  : ... modèle de LRR ; -- modèle de Lumley et al. ; — modèle de Launder et al. ; symboles  $\circ$  expériences de Sirivat et Warhaft ;  $\square$  SGE de Chasnov.

Fig. 2. Evolution of the dimensionless parameter  $\frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta}$  : ... model of LRR ; -- model of Lumley et al. ; — model of Launder et al. ; symbols  $\circ$  experiments of Sirivat and Warhaft ;  $\square$  LES of Chasnov.

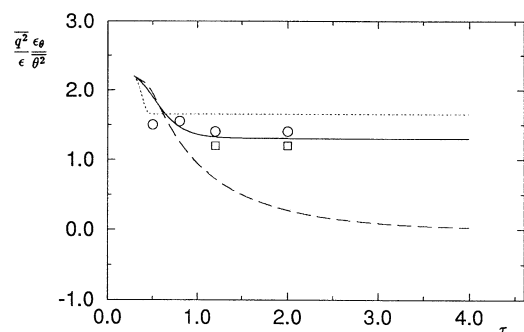


Fig. 3. Évolution du rapport des temps caractéristiques  $\frac{q^2}{\varepsilon} \frac{\varepsilon_\theta}{\theta^2}$  : ... modèle de LRR ; -- modèle de Lumley et al. ; — modèle de Launder et al. ; symboles  $\circ$  expériences de Sirivat et Warhaft ;  $\square$  SGE de Chasnov.

Fig. 3. Evolution of the characteristic timescale ratio  $\frac{q^2}{\varepsilon} \frac{\varepsilon_\theta}{\theta^2}$  : ... model of LRR ; -- model of Lumley et al. ; — model of Launder et al. ; symbols  $\circ$  experiments of Sirivat and Warhaft ;  $\square$  LES of Chasnov.

$$\frac{d}{d\tau}\overline{\theta^2} = -2\left[\frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta} + 1\right]\rho_3\overline{\theta^2} \quad (20)$$

$$\frac{d}{d\tau}\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta(C_{d3}\rho_2\rho_3 - C_{d1}\rho_3 - C_{d2}) \quad (21)$$

et quand  $\tau \rightarrow \infty$

$$\dot{\overline{\theta^2}} = -2\left[\left(\frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta}\right)_\infty + 1\right](\rho_3)_\infty\overline{\theta^2} \quad (22)$$

$$\dot{\varepsilon}_\theta = \varepsilon_\theta(C_{d3}(\rho_2)_\infty(\rho_3)_\infty - C_{d1}(\rho_3)_\infty - C_{d2}) \quad (23)$$

Alors que les comportements asymptotiques de ces grandeurs se traduisent par des évolutions de  $\overline{\theta^2}$  et  $\varepsilon_\theta$  sous les formes :

$$\overline{\theta^2} = (\overline{\theta^2})_0 \exp\left[-2\left[\left(\frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta}\right)_\infty + 1\right](\rho_3)_\infty\tau\right] \quad (24)$$

et

$$\varepsilon_\theta = (\varepsilon_\theta)_0 \exp(C_{d3}\rho_2\rho_3 - C_{d1}\rho_3 - C_{d2})\tau \quad (25)$$

où  $(\overline{\theta^2})_0$  et  $(\varepsilon_\theta)_0$  désignent les valeurs initiales de la variance de la fluctuation de la température  $\overline{\theta^2}$  et de sa dissipation  $\varepsilon_\theta$ .

#### 4. États d'équilibre d'un champ thermique d'une turbulence homogène cisaillée

Nous poursuivons dans cette partie du travail la prédiction des états d'équilibre d'un champ thermique d'une turbulence homogène de vitesse moyenne  $U_1$  selon la direction longitudinale  $x_1$ . Nous considérons le cas d'une turbulence homogène cisaillée, associée à un champ thermique présentant un gradient moyen de température  $\alpha = \frac{dT}{dx_2}$  dans la même direction verticale  $x_2$  que celle du cisaillement  $S = \frac{dU_1}{dx_2}$ .

Si le premier écoulement a permis une évaluation partielle des modèles au second second ordre, le cas de ce deuxième écoulement permettra leur meilleure évaluation. En effet, l'anisotropie de l'écoulement introduira les modèles des termes linéaires des corrélations pression-déformation  $\Phi_{ij}$  et pression-température  $\Phi_{i\theta}$  ainsi que les formes complètes des modèles des équations des dissipations  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_\theta$ .

Le cas de turbulence homogène cisaillée a fait l'objet de nombreuses études expérimentales, théoriques et de simulation numérique directe. L'une des expériences les plus connues est celle réalisée par Tavoularis et Corrsin [14] qui ont étudié l'évolution d'une turbulence homogène en aval de deux grilles cinématique et thermique produisant respectivement deux gradients moyens de vitesse et de température constants.

En 1983, Bardina et al. [17] ont effectué des simulations numériques directes d'une turbulence homogène cisaillée.

Speziale et Mhuiris [1] ont effectué une étude de synthèse des modèles de turbulence au second ordre où ils ont comparé les prédictions des différents modèles aux résultats expérimentaux de Tavoularis et Corrsin [14] et ceux de simulation numérique directe de Bardina et al. [17]. Cette

étude a concerné essentiellement la prédiction des états d'équilibre des grandeurs adimensionnelles  $b_{11}$ ,  $b_{22}$ ,  $b_{12}$  et  $\frac{\varepsilon}{KS}$  caractérisant le champ cinématique.

En turbulence thermique les résultats expérimentaux de Tavoularis et Corrsin [14], ont montré que l'évolution du champ thermique est caractérisée par le comportement asymptotique d'autres grandeurs adimensionnelles. Le rapport des flux thermiques  $\frac{\overline{\theta u_1}}{\overline{\theta u_2}}$  et le nombre de Prandtl turbulent  $\frac{\overline{u_1 u_2 \alpha}}{\overline{\theta u_2 S}}$  évoluent vers des états d'équilibre quand le temps adimensionnel  $\tau = St$  devient grand. Les résultats de simulation numérique directe de Rogers et al. [18], relatifs au même type d'écoulement turbulent, ont montré un comportement pareil de  $B = \frac{q'/S}{\overline{\theta^2}/\varepsilon_\theta}$ , du rapport des temps caractéristiques  $r = \frac{q'^2/\varepsilon}{\overline{\theta^2}/\varepsilon_\theta}$  et des coefficients de corrélation  $\frac{\overline{\theta u_i}}{\overline{\theta'} q'}$  ( $i = 1, 2$ ).

La prédiction des états d'équilibre de ces grandeurs adimensionnelles, caractérisant le champ thermique, à l'aide des modèles au second ordre présente l'objet de cette partie du travail.

##### 4.1. Analyse des résultats de simulation numérique

En s'intéressant tout d'abord au comportement de la grandeur adimensionnelle  $B$  [18], une équation d'évolution de cette grandeur est facilement obtenue à partir de celles de  $\overline{\theta^2}$  et  $q'^2$ .

$$\frac{d}{dt}q'^2 = -2\overline{u_1 u_2}S - 2\varepsilon \quad (26.1)$$

$$\frac{d}{dt}\overline{\theta^2} = -2\overline{\theta u_2} \frac{dT}{dx_2} - 2\varepsilon_\theta \quad (26.2)$$

$$\frac{d}{dt}B = \left[ \frac{1}{\overline{\theta'}} \frac{d}{dt}(q') + q' \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\overline{\theta'}} \right) \right] \frac{\alpha}{S} \quad (27)$$

Et par suite, elle peut prendre la forme adimensionnelle suivante :

$$\frac{d}{d\tau}B = \dot{B} = B \left( -2b_{12} - \frac{\varepsilon}{KS} + \frac{2\overline{\theta u_2} \alpha}{S\overline{\theta^2}} + \frac{2\varepsilon_\theta}{S\overline{\theta^2}} \right) \quad (28)$$

où  $\tau = St$ .

Le comportement asymptotique de  $B$  [18] correspond au point fixe de l'équation différentielle (28) et se traduit par une dérivée nulle ( $\frac{d}{d\tau} = 0$ ). Ceci conduit à la relation algébrique suivante pour une valeur non nulle de  $B$  :

$$\left( \frac{P}{q'^2 S} \right)_\infty + \left( \frac{\varepsilon}{q'^2 S} \right)_\infty = \left( \frac{P_\theta}{\overline{\theta^2} S} \right)_\infty + \left( \frac{\varepsilon_\theta}{S\overline{\theta^2}} \right)_\infty \quad (29)$$

Nous remarquons ici une analogie entre les deux termes de cette égalité. D'après cette relation, la production et le temps caractéristique cinématiques adimensionnés sont égaux à la production et le temps caractéristique thermiques. Si les deux premiers termes de l'égalité possèdent séparément un comportement asymptotique [1], la somme des deux termes de droite le possèdera aussi.

Mais en considérant la relation :

$$\frac{P}{q^2 S} + \frac{\varepsilon}{q^2 S} = \frac{P_\theta}{\theta^2 S} + \frac{\varepsilon_\theta}{S \theta^2} \quad (30.1)$$

qui s'écrit aussi :

$$\frac{P}{q^2 S} + \frac{\varepsilon}{q^2 S} = \frac{\varepsilon}{q^2 S} \left( \frac{P_\theta}{S \theta^2} \frac{q^2 S}{\varepsilon} + r \right) \quad (30.2)$$

nous pouvons déduire que :

$$\left( \frac{P_\theta}{\theta^2 S} \right) = \frac{(P/KS + \varepsilon/KS)(KS/\varepsilon - r)}{(\varepsilon/2KS)} \quad (31)$$

et vu le comportement asymptotique des différents termes du second membre de cette égalité [1,14,18], un comportement asymptotique caractérisera aussi la quantité adimensionnelle  $\frac{P_\theta}{S \theta^2}$ . En conséquence de la relation (30.1), la quantité adimensionnelle  $\frac{\varepsilon_\theta}{S \theta^2}$  aura aussi un comportement asymptotique.

Il est à noter que dans une étude précédente, nous avons justifié mathématiquement le comportement asymptotique de ces grandeurs adimensionnelles thermiques [19]. A partir de cette simple analyse nous justifions encore, une deuxième fois, ce comportement. Les évolutions de ces rapports adimensionnels seront encore analysées au paragraphe suivant où nous nous intéressons à la prédiction du comportement asymptotique à l'aide des modèles au second ordre.

#### 4.2. Modélisation des équations de l'écoulement—États d'équilibre

Commençons tout d'abord par indiquer que les équations d'évolution des composantes  $\overline{u_1^2}$ ,  $\overline{u_2^2}$  et  $\overline{u_1 u_2}$  des tensions de Reynolds, de l'énergie cinétique  $K$  et de sa dissipation  $\varepsilon$  décrivent le champ cinématique, et que les équations d'évolution des flux thermiques turbulents  $u_1 \theta$ ,  $u_2 \theta$ , de la variance de la température  $\overline{\theta^2}$  et de sa dissipation  $\varepsilon_\theta$  décrivent, quant à elles, le champ thermique.

Si l'on considère la modélisation au second ordre des équations d'évolution des corrélations doubles, une fermeture de ces équations est obtenue en modélisant les termes de corrélation pression-déformation, pression-température ainsi que les équations d'évolution des dissipations  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_\theta$ .

Nous retenons pour cette deuxième application les mêmes modèles de turbulence au second ordre appliqués au cas précédent. Il s'agit des modèles classiques de Launder, Reece et Rodi [4], des modèles de Shih et Lumley [5–8] et ceux de Launder et al. [9–11].

En introduisant tout d'abord les modèles de Launder, Reece et Rodi 1975 [4] dans les équations générales de l'écoulement, nous obtenons les équations différentielles suivantes :

$$\frac{d}{dt} \overline{u_1^2} = \frac{4}{3} (C_2 - 1) \overline{u_1 u_2} S - 2C_1 \varepsilon b_{11} - \frac{2}{3} \varepsilon \quad (32)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{u_2^2} = -\frac{2}{3} C_2 \overline{u_1 u_2} S - 2C_1 \varepsilon b_{22} - \frac{2}{3} \varepsilon \quad (33)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{u_1 u_2} = (C_2 - 1) \overline{u_2^2} S - 2C_1 \varepsilon b_{12} \quad (34)$$

$$\frac{d}{dt} K = -\overline{u_1 u_2} S - \varepsilon \quad (35)$$

$$\frac{d}{dt} \varepsilon = -2C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} b_{12} S - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K} \quad (36)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{\theta u_1} = -2\overline{u_1 u_2} T_{,2} - 0, 2\overline{\theta u_2} S - 3, 2 \frac{\varepsilon}{K} \overline{\theta u_1} \quad (37)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{\theta u_2} = -\overline{u_2^2} T_{,2} - 0, 2\overline{\theta u_1} S - 3, 2 \frac{\varepsilon}{K} \overline{\theta u_2} \quad (38)$$

$$\frac{d}{dt} \overline{\theta^2} = -2\overline{\theta u_2} T_{,2} - 2\varepsilon_\theta \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varepsilon_\theta = & -C_{d1} \frac{\varepsilon_\theta^2}{\theta^2} - 2C_{d2} \frac{\varepsilon}{K} \varepsilon_\theta \\ & - C_{d3} \frac{\varepsilon_\theta}{\theta^2} \overline{\theta u_2} T_{,2} - 2C_{d4} \frac{\overline{u_1 u_2}}{K} S \varepsilon_\theta \end{aligned} \quad (40)$$

Il est essentiel de signaler à ce niveau du travail que l'étude des états d'équilibre du champ thermique ne peut pas être effectuée avant celle des grandeurs adimensionnelles  $b_{11}$ ,  $b_{22}$ ,  $b_{12}$  et  $\frac{\varepsilon}{KS}$  caractérisant le champ cinématique. Dans ce sens, une modélisation des équations d'évolution du champs cinématique est effectuée à l'aide des modèles de Lumley et al. [5–8] et Launder et al. [9–11]. Cette modélisation concerne les corrélations pression-déformation ainsi que l'équation d'évolution de dissipation de l'énergie cinétique  $\varepsilon$ .

Les évolutions des grandeurs adimensionnelles cinématiques, sus-mentionnées, sont déduites en intégrant numériquement les équations modélisées relatives aux grandeurs turbulentes et soumises aux conditions initiales expérimentales :

$$\begin{aligned} \overline{u_1^2} &= 0,22 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}, & \overline{u_2^2} &= 0,22 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}, & \overline{u_1 u_2} &= 0,0 \\ \overline{q^2} &= 0,66 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}, & \varepsilon &= 1,5 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-3} \end{aligned} \quad (41)$$

Les résolutions des systèmes d'équations différentielles relatifs aux trois modèles sont effectuées là aussi par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 et sont poursuivies vers des intervalles de temps adimensionnels suffisamment grands. Ils ont montré que les évolutions des grandeurs adimensionnelles cinématiques se stabilisent aux valeurs d'équilibre présentées au Tableau 2. Ces valeurs d'équilibre obtenues par Speziale et Mhuiris [1] et retrouvées ici, sont essentielles pour aborder l'étude des états d'équilibre du champ thermique.

Revenons maintenant au champ thermique, qui représente l'objet essentiel de ce travail et qui est caractérisé, quant à lui, par le comportement asymptotique des grandeurs adimensionnelles  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ , ( $\rho_i = \frac{u_i \theta}{u_i' \theta'}$  pour  $i = 1$  ou  $2$ ), du rapport des flux thermiques turbulents  $\frac{\overline{\theta u_1}}{\overline{\theta u_2}}$ , du nombre de Prandtl turbulent ( $\frac{\overline{u_1 u_2} \alpha}{\overline{\theta u_2} S}$ ) et des quantités ( $\frac{\varepsilon_\theta}{S \theta^2}$ ) et ( $\frac{P_\theta}{S \theta^2}$ ) (dont le comportement asymptotique vient d'être confirmé).

Tableau 2  
États d'équilibre des grandeurs adimensionnelles cinématiques

Modèles	$(b_{11})_{\infty}$	$(b_{12})_{\infty}$	$(b_{22})_{\infty}$	$(\frac{\varepsilon}{KS})_{\infty}$
LRR 75	0,119	-0,0952	-0,184	5,42
Lumley et al.	0,114	-0,122	-0,116	6,93
Launder et al.	0,208	-0,146	-0,144	6,84
Expériences TC 81	0,201	-0,150	-0,150	6,08
SND Bardina	0,305	-0,149	-0,205	...

Tableau 3  
États d'équilibre des grandeurs adimensionnelles thermiques

Modèles	$(\rho_1)_{\infty}$	$(\rho_2)_{\infty}$	$(\rho_3)_{\infty}$	$(\rho_4)_{\infty}$	$(B)_{\infty}$
LRR 75	0,664	-1,14	-0,861	3,78	0,99
Lumley et al.	0,792	-0,976	-1,16	1,57	1,25
Launder et al.	0,497	-0,478	-1,76	2,37	1,43
Expériences TC 81	0,58	-0,45	-2,2/-2,1	...	1,5
SND Rogers	0,58	-0,45	-2,2/-2,1	1,6	0,8

Nous poursuivons la modélisation des équations d'évolution du champ thermique à l'aide des modèles de Shih et Lumley [5–8] et Launder et al. [9–11] pour obtenir des systèmes différentiels qui seront soumis aux conditions initiales thermiques suivantes :

$$\begin{aligned} (\overline{\theta u_1})_0 &= 0,0256^\circ\text{C}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1}, & (\overline{\theta u_2})_0 &= -0,02^\circ\text{C}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^{-1} \\ (\overline{\theta^2})_0 &= 0,0155^\circ\text{C}^2, & (\varepsilon_\theta)_0 &= 0,0155^\circ\text{C}^2\cdot\text{s}^{-1} \end{aligned} \quad (42)$$

La résolution des systèmes différentiels est effectuée là aussi, par la méthode de Runge–Kutta et est poursuivie vers des intervalles de temps suffisamment grands. On a pu constater que les évolutions des grandeurs adimensionnelles relatives aux trois modèles se stabilisent aux valeurs d'équilibre indiquées au Tableau 3.

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{\overline{u_1 \theta}}{\overline{u_1' \theta'}}, & \rho_2 &= \frac{\overline{u_2 \theta}}{\overline{u_2' \theta'}} \\ \rho_3 &= \frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta}, & \rho_4 &= \frac{\overline{q^2} \varepsilon_\theta}{\varepsilon \overline{\theta^2}} \end{aligned}$$

Les valeurs d'équilibre indiquées dans ce tableau montrent, encore une fois, que les modèles de Launder et al. [9–11] sont ceux qui assurent la meilleure approximation des valeurs expérimentales de Tavoularis et Corrsin [14]. Pour certaines grandeurs adimensionnelles un assez bon accord est constaté entre modèles de Lumley [5–8] et de LRR 75 [4] d'une part et les résultats expérimentaux de Tavoularis et Corrsin [14] d'autre part. Les évolutions du coefficient de corrélation associé au flux thermique turbulent  $\overline{\theta u_1}$  sont présentées sur la Fig. 4. Les résultats issus des trois modèles ne présentent pas d'aberration physique particulière. Les modèles de Lumley et al. [5–8] et les modèles classiques, montrent respectivement une sur-estimation d'environ 50 % et 30 % de la valeur expérimentale.

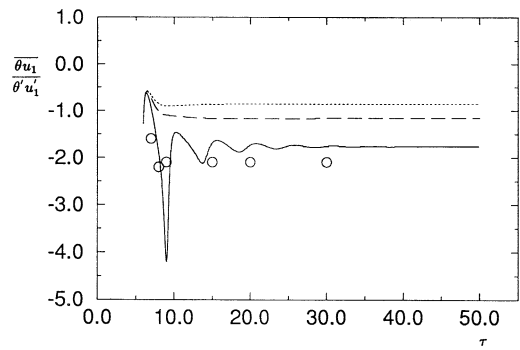


Fig. 4. Évolution du coefficient de corrélation  $\frac{\overline{\theta u_1}}{\overline{\theta' u_1'}}$  : ... modèle de LRR; -- modèle de Lumley et al.; — modèle de Launder et al.; Symboles  $\circ$  expériences de Tavoularis et Corrsin.

Fig. 4. Evolution of the correlation coefficient  $\frac{\overline{\theta u_1}}{\overline{\theta' u_1'}}$  : ... model of LRR; -- model of Lumley et al.; — model of Launder et al.; Symbols  $\circ$  experiments of Tavoularis and Corrsin.

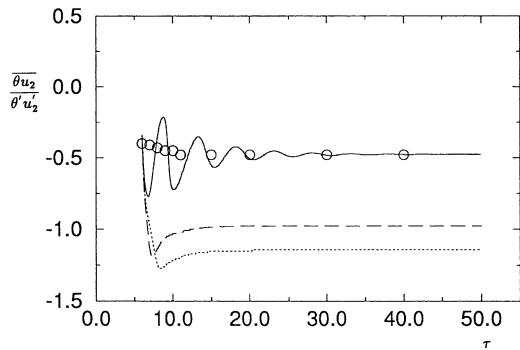


Fig. 5. Évolution du coefficient de corrélation  $\frac{\overline{\theta u_2}}{\overline{\theta' u_2'}}$  : ... modèle de LRR; -- modèle de Lumley et al.; — modèle de Launder et al.; Symboles  $\circ$  expériences de Tavoularis et Corrsin.

Fig. 5. Evolution of the correlation coefficient  $\frac{\overline{\theta u_2}}{\overline{\theta' u_2'}}$  : ... model of LRR; -- model of Lumley et al.; — model of Launder et al.; Symbols  $\circ$  experiments of Tavoularis and Corrsin.

La Fig. 5 montre les évolutions du coefficient de corrélation  $\rho_2$  associé au flux thermique turbulent  $\overline{\theta u_2}$ . Là aussi, ce sont les modèles de Launder et al. [9–11] qui montrent la meilleure approximation de la valeur d'équilibre expérimentale. Le modèle de Lumley et al. [5–8] sous-estime d'environ 100 % la valeur d'équilibre expérimentale alors que le modèle classique montre une aberration physique claire; sa prédiction du coefficient de corrélation dépasse l'unité.

Les évolutions du rapport des flux thermiques turbulents sont présentées à la Fig. 6, c'est toujours le modèle de Launder qui assure la meilleure approximation des valeurs expérimentales comprises entre -2,2 et -2,1.

La Fig. 7 montre les évolutions du rapport des temps caractéristiques cinématique et thermique. Contrairement aux cas de figure précédents, c'est le modèle de Lumley qui assure la meilleure prédiction des valeurs d'équilibre de ce rapport. Ceci peut être justifié si on rappelle que la modélisation des équations d'évolution des dissipations  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_\theta$  est



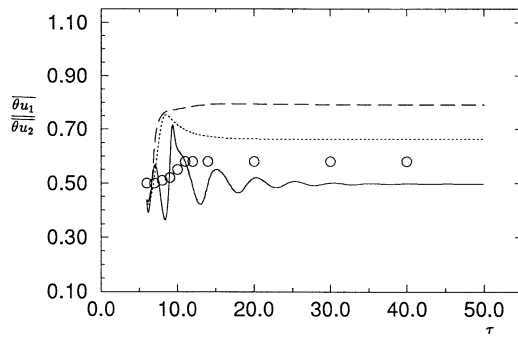


Fig. 6. Évolution du rapport adimensionnel  $\frac{\overline{\theta u_1}}{\overline{\theta u_2}}$  : ... modèle de LRR; -- modèle de Lumley et al.; — modèle de Launder et al.; symboles  $\circ$  expériences de Tavoularis et Corrsin.

Fig. 6. Evolution of the dimensionless parameter  $\frac{\overline{\theta u_1}}{\overline{\theta u_2}}$ : ... model of LRR; -- model of Lumley et al.; — model of Launder et al.; Symbols  $\circ$  experiments of Tavoularis and Corrsin.

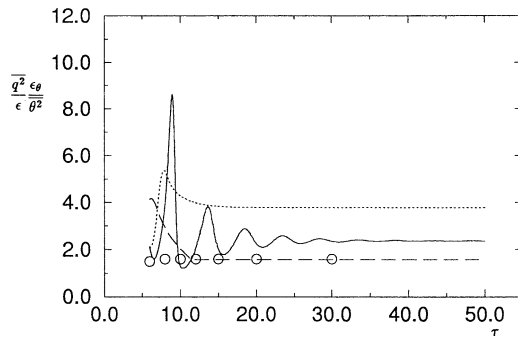


Fig. 7. Évolution du rapport des temps caractéristiques  $\frac{\overline{q^2} \epsilon_\theta}{\epsilon \theta^2}$  : ... modèle de LRR; -- modèle de Lumley et al.; — modèle de Launder et al.; Symboles  $\circ$  simulations numériques directes de Rogers et al.

Fig. 7. Evolution of the characteristic timescale ratio  $\frac{\overline{q^2} \epsilon_\theta}{\epsilon \theta^2}$ : ... model of LRR; -- model of Lumley et al.; — model of Launder et al.; Symbols  $\circ$  direct numerical simulation of Rogers et al.

effectuée sur l'hypothèse d'un comportement asymptotique du rapport des temps caractéristiques  $\frac{\overline{q^2} \epsilon_\theta}{\epsilon \theta^2}$  [7].

Nous notons ici qu'une détermination des expressions des états d'équilibre des grandeurs adimensionnelles thermiques, en fonction des coefficients des modèles et des valeurs initiales, à la manière abordée par Speziale et Mhouri [1] pour les grandeurs adimensionnelles cinématiques est possible pour le modèle de Launder, Reece et Rodi (1975) [4].

Finalement, les évolutions présentées aux Figs. 8, 9 et 10 confirment d'avantage que c'est le modèle de Launder et al. [9–11] qui assure la meilleure prédiction des valeurs d'équilibre des grandeurs adimensionnelles  $\frac{\epsilon_\theta}{S\theta^2}$ , de B et du nombre de Prandtl turbulent.

On note enfin que les grandeurs adimensionnelles peuvent être introduites dans les équations d'évolution des grandeurs thermiques. L'équation d'évolution de la dissipation de la variance de la température, par exemple, prendra la forme :

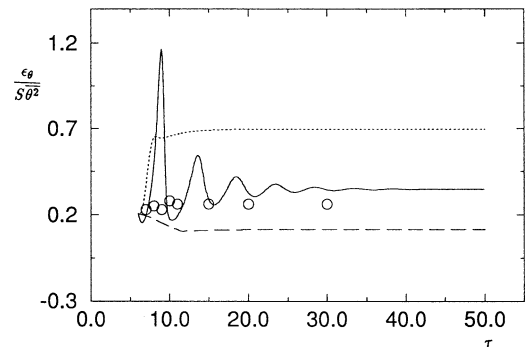


Fig. 8. Évolution du rapport adimensionnel  $\frac{\epsilon_\theta}{S\theta^2}$  : ... modèle de LRR; -- modèle de Lumley et al.; — modèle de Launder et al.; Symboles  $\circ$  expériences de Tavoularis et Corrsin.

Fig. 8. Evolution of the dimensionless parameter  $\frac{\epsilon_\theta}{S\theta^2}$ : ... model of LRR; -- model of Lumley et al.; — model of Launder et al.; Symbols  $\circ$  experiments of Tavoularis and Corrsin.

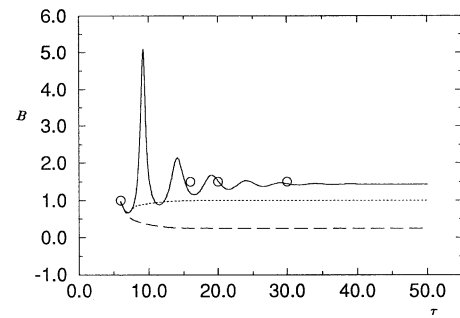


Fig. 9. Évolution du rapport adimensionnel B : ... modèle de LRR; -- modèle de Lumley et al.; — modèle de Launder et al.; Symboles  $\circ$  expériences de Tavoularis et Corrsin.

Fig. 9. Evolution of the dimensionless parameter B: ... model of LRR; -- model of Lumley et al.; — model of Launder et al.; Symbols  $\circ$  experiments of Tavoularis and Corrsin.

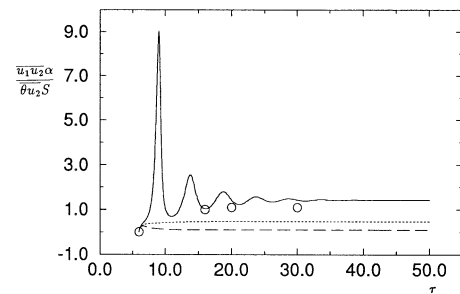


Fig. 10. Évolution du nombre de Prandtl turbulent  $\frac{\overline{u_1 u_2} \alpha}{\overline{\theta u_2} S}$  : ... modèle de LRR; -- modèle de Lumley et al.; — modèle de Launder et al.; Symboles  $\circ$  expériences de Tavoularis et Corrsin.

Fig. 10. Evolution of the turbulent Prandtl number  $\frac{\overline{u_1 u_2} \alpha}{\overline{\theta u_2} S}$ : ... model of LRR; -- model of Lumley et al.; — model of Launder et al.; Symbols  $\circ$  experiments of Tavoularis and Corrsin.

$$\frac{d}{d\tau} \epsilon_\theta = \left[ -C_{d1} \frac{\epsilon_\theta}{S\theta^2} - C_{d2} \frac{\epsilon}{KS} + C_{d3} \frac{P_\theta}{S\theta^2} \frac{\epsilon_\theta}{S\theta^2} + C_{d4} b_{12} \right] \epsilon_\theta \quad (43)$$

et aura pour solution quand  $\tau \rightarrow \infty$

$$\varepsilon_\theta = (\varepsilon_\theta)_0 \left[ -C_{d1} \frac{\varepsilon_\theta}{S\theta^2} - 2C_{d2} \frac{\varepsilon}{KS} + C_{d3} \frac{P_\theta}{S\theta^2} \frac{\varepsilon_\theta}{S\theta^2} + C_{d4} b_{12} \right] \tau \quad (44)$$

## 5. Conclusion

Nous avons pu prédire dans ce travail les états d'équilibre d'un champ thermique en considérant deux cas de turbulences homogènes. Cette prédiction a été effectuée à l'aide des modèles au second ordre. Il s'agit des modèles classiques [4] (qu'on a notés Launder, Reece et Rodi (1975)), des modèles de Shih et Lumley [5–8] et ceux de Launder et al. [9–11]. En effet, ces classes de modèles sont les seules, à notre connaissance, qui assurent la fermeture des équations d'évolution des champs cinématique et thermique.

Le premier cas d'écoulement que nous avons considéré est celui d'une turbulence homogène isotrope associée à un champ thermique présentant un gradient moyen constant de température.

Les résultats expérimentaux de Sirivat et Warhaft [12] et les résultats de type simulation aux grandes échelles de Chasnov [13], qui montrent l'existence de grandeurs adimensionnelles thermiques

$$\left( \rho_1 = \frac{\overline{u_1 \theta}}{\overline{u'_1 \theta'}}, \quad \rho_2 = \frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta}, \quad \rho_3 = \frac{\overline{q^2} \varepsilon_\theta}{\varepsilon \overline{\theta^2}} \right)$$

possédant un comportement asymptotique d'équilibre, ont été pris comme références. Nous précisons ici que les équations d'évolution de l'écoulement ont été modélisées respectivement par les trois classes de modèles retenus. L'intégration numérique des équations différentielles, issues de ces modélisations, est effectuée par la méthode de Runge–Kutta d'ordre 4 et est poursuivie vers des intervalles de temps grands. Les résultats déduits de cette intégration numérique, présentés au Tableau 1 et aux Figs. 1, 2 et 3, ont montré que les modèles de Launder et al. [9–11] sont ceux qui ont assuré, particulièrement, la meilleure prédiction des valeurs d'équilibre expérimentales.

Le deuxième cas d'écoulement considéré est celui d'un champ thermique d'une turbulence homogène cisailée. Les résultats expérimentaux de Tavoularis et Corrsin [14] et les résultats numériques de Rogers et al. [18] constituent pour les auteurs une référence de base pour ce type d'écoulement. Celui-ci a permis d'évaluer les formes complètes des modèles retenus pour ce travail. En effet, le cisaillement introduit dans les modèles des termes linéaires des corrélations pression-déformation et pression-température ainsi que les termes proportionnels aux gradients de vitesse dans les équations d'évolution des dissipations  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_\theta$ . Contrairement à l'écoulement précédent où l'isotropie de l'écoulement ramène les différents modèles à des formes pratiquement sem-

blables, dans ce cas de figure, la différence est nette entre les différents modèles.

Si le comportement asymptotique des coefficients de corrélation associés aux flux thermiques turbulents a été déjà étudié par quelques auteurs [21–24], celui des autres grandeurs adimensionnelles thermiques  $\frac{\varepsilon_\theta}{S\theta^2}$ , et  $\frac{P_\theta}{S\theta^2}$ , analogues aux grandeurs adimensionnelles  $\frac{\varepsilon}{KS}$  et  $\frac{P}{KS}$ , est étudié ici pour la première fois.

La démarche suivie est la même que celle adoptée au cas d'écoulement précédent. Les équations d'évolution de l'écoulement sont respectivement modélisées à l'aide des trois classes de modèles retenus, l'intégration numérique par la méthode de Runge–Kutta poursuivie vers des intervalles de temps grands a permis d'obtenir les résultats présentés au Tableau 3 et aux Figs. 4, 5, ..., 10. Nous avons pu constater que ce sont, toujours, les modèles de Launder et al. [9–11] soumis à l'hypothèse de turbulence bidimensionnelle [25], qui ont assuré la meilleure prédiction des états d'équilibre des grandeurs adimensionnelles thermiques

$$\rho_1 = \frac{\overline{u_1 \theta}}{\overline{u'_1 \theta'}}, \quad \rho_2 = \frac{\overline{u_2 \theta}}{\overline{u'_2 \theta'}}$$

$$\rho_3 = \frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta} \quad \text{et} \quad \rho_4 = \frac{\overline{q^2} \varepsilon_\theta}{\varepsilon \overline{\theta^2}}$$

et de toutes les autres grandeurs adimensionnelles. Un accord parfois acceptable entre les modèles de Lumley et al. [5–8] et ceux de Launder, Reece et Rodi [4] d'une part et les résultats expérimentaux d'autre part est observé.

On conclut à partir de ces deux applications que les modèles de Launder et al. [9–11] sont les plus adaptés aux champs thermiques d'une turbulence homogène. Ces résultats confirment également l'efficacité de l'application de l'hypothèse de turbulence bidimensionnelle [25] à la modélisation des corrélations pression-déformation et pression-température.

Il est essentiel de noter à ce niveau que cette partie du travail n'a pu être faite sans reprendre l'étude des états d'équilibre des grandeurs adimensionnelles cinématiques  $b_{11}$ ,  $b_{12}$ ,  $b_{22}$  et  $\frac{\varepsilon}{KS}$ , effectuée par Speziale et Mhuiris [1]; dans la mesure où l'étude du champ thermique d'une turbulence, ne peut pas être découplée de son champ cinématique. Les valeurs d'équilibre des grandeurs adimensionnelles cinématiques citées ont été retrouvées et sont présentées au Tableau 2.

Nous signalons enfin que cette étude des états d'équilibre des grandeurs adimensionnelles thermiques peut être étendue aux cas d'écoulements turbulents en présence de la gravité. Ces écoulements feront apparaître un paramètre adimensionnel appelé le nombre de Richardson thermique  $R_i = \frac{g}{T_0} \frac{\alpha}{S^2}$ .

Les résultats numériques du type simulation numérique directe obtenus respectivement par Steven et Holt [26] et par Gerz et al. [27], nos solutions analytiques [28] ainsi que les résultats récents de Jacobitz et al. [29] et ceux de Shih et al. [30] peuvent constituer une référence essentielle pour

ce genre d'étude. L'étude de stabilité des états d'équilibre en fonction du paramètre adimensionnel  $R_i$  peut faire l'objet d'une étude intéressante. Une analogie entre les états d'équilibre des grandeurs adimensionnelles cinématiques et thermiques dans ce type d'écoulement d'une part et celles d'une turbulence homogène cisailée en référentiel tournant d'autre part peut aussi être envisagée.

## Remerciements

We are grateful to Mis Nebila Dhieb-HENIA (Faculté des Sciences de Bizerte) for correcting the english section of this work.

## Annexe A. Modèles classiques

*Modèles de Launder, Reece et Rodi (1975)*

$$\Phi_{ij1} = -C_1 \frac{\varepsilon}{K} b_{ij}$$

$$\Phi_{ij2} = C_2 \left( \overline{u_i u_j} U_{j,k} + \overline{u_i u_j} U_{k,j} - \frac{2}{3} \overline{u_m u_n} U_{m,n} \delta_{ij} \right)$$

$$C_1 = 3,6 \quad C_2 = 0,6$$

$$\Phi_{i\theta 1} = -C_{1\theta} \frac{\varepsilon}{K} \overline{u_i \theta} \quad \text{et} \quad C_{1\theta} = 3,2$$

$$\Phi_{i\theta 2} = 0,8 \overline{\theta u_k} U_{i,k} - 0,2 \overline{\theta u_k} U_{k,i}$$

*Modèles des équations des dissipations  $\varepsilon$  et  $\varepsilon_\theta$*

$$\frac{d}{dt} \varepsilon = -2C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{K} b_{lm} U_{l,m} S - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{K}$$

$$\frac{d}{dt} \varepsilon_\theta = -C_{d1} \frac{\varepsilon_\theta^2}{\theta^2} - 2C_{d2} \frac{\varepsilon}{K} \varepsilon_\theta - C_{d3} \frac{\varepsilon_\theta}{\theta^2} \overline{\theta u_l} T_{,l}$$

$$- 2C_{d4} \frac{\overline{u_1 u_2}}{K} S \varepsilon_\theta \quad [20]$$

$$C_{\varepsilon 1} = 1,45, \quad C_{\varepsilon 2} = 1,9$$

$$C_{d1} = 2,0, \quad C_{d2} = 1,8$$

$$C_{d3} = 1,7, \quad C_{d4} = 1,4$$

## Abridged English version

### Prediction of equilibrium states of a thermal field in homogeneous turbulence

In the present study a prediction of the equilibrium states of a thermal field in two cases of homogeneous turbulence is presented. This prediction is made by the usual second order models: the classical model of Launder, Reece and Rodi [4], the Shih and Lumley model [5–8] and the Launder et al. [9–11] one. In fact these models are the most commonly used ensuring the closure of the evolution equation of the kinematic field and the thermal field.

The first case of turbulence considered here is the case of homogeneous isotropic turbulence associated to

a thermal field presenting a constant mean temperature gradient  $\frac{dT}{dx_2}$ . We refer in this case to the experimental results of Sirivat and Warhaft [12] and the Large Eddy Simulation of Chasnov [13] and his analytical solutions which have shown an asymptotic behaviour of dimensionless parameters. These parameters are the correlation coefficient of the heat flux  $\overline{u_3 \theta}$ , the dimensionless parameter  $\frac{P_\theta}{\varepsilon_\theta}$  and the time scale ratio  $r = \frac{\overline{q^2}}{\varepsilon} \frac{\varepsilon_\theta}{\theta^2}$ .

In this work, we are interested in the prediction in the equilibrium states of the above parameters by the second order models and we compare the predictions to previous experimental and Large Eddy Simulation results. The dimensionless evolution equations of mentioned parameters are written and resolved using the fourth order Runge–Kutta method. The results presented on Figs. 1–3 and in Table 1 have shown that the elaborated model of Launder et al. predicts the best approximation of the equilibrium states observed experimentally and obtained by Chasnov [13].

The second case of turbulence considered in this work is the case of homogeneous sheared turbulence submitted to a thermal field having a constant mean temperature gradient in the same direction as the one of the shear. The same models are retained for testing the prediction of equilibrium states.

It is essential to note that this second application allows us to test the global form of the second order models. Indeed the shear introduces the model of the linear terms of the pressure-strain correlation and the one of the pressure-temperature, whereas the first application introduces only the model of the return to isotropy terms of these correlations.

We are referred here to the experimental results of Tavoularis and Corrsin [14] and the Direct Numerical Simulation of Rogers and Mansour [18]. These results have shown that the correlation coefficient of heat flux  $\overline{\theta u_i}$  ( $i = 1, 2$ ), the dimensionless parameter  $B = \frac{q'}{S} / \frac{\theta'}{S_\theta}$  and the time scale ratio  $r = (\overline{q^2}/\varepsilon)/(\overline{\theta^2}/\varepsilon_\theta)$  have attained an asymptotic state.

We have shown by writing the time evolution equation of the dimensionless parameter  $B$  that the dimensionless parameters  $\frac{\varepsilon_\theta}{S\theta^2}$  and  $\frac{P_\theta}{S\theta^2}$  have an asymptotic behaviour. This result confirms a previous work [19], in which we analysed mathematically the asymptotic behaviour of these dimensionless parameters. We note also that these parameters are analogs to  $\frac{\varepsilon}{KS}$  and  $\frac{P}{KS}$  characterizing the kinematic field. Because of coupling of the thermal field and the kinematic one, it is essential to note in this part of the work, that we begin by the prediction of the equilibrium states of the kinematic dimensionless parameters  $b_{11}$ ,  $b_{22}$ ,  $b_{12}$  and  $\frac{\varepsilon}{KS}$  which have constituted the object of an interesting paper presented by Speziale and Mhuiris [1]. This part of the work is a tentative extension of this prediction to the thermal field. The evolution equations of the thermal field are associated to those describing the kinematic one.

A Runge–Kutta method method is also used for integrating the evolution equations. The results presented on Figs. 4–10 and in Table 3 have shown that the Launder et al. models predict the best approximation of the experimental results of Tavoularis and Corrsin, and the direct numerical simulation of Rogers et al.

Finally, we note that this work can be extended to the case of turbulent flow in presence of buoyancy characterized by a dimensionless Richardson number  $R_i$ . The numerical simulation of Steven and Holt [26] and those of Gerz et al. [27] and our analytical solution [28] can constitute an essential reference. A study of the behaviour of the dimensionless parameters for various Richardson number seems also very interesting.

## Références

- [1] C.G. Speziale, N.M. Mhuiris, On the prediction of equilibrium states in homogeneous turbulence, *J. Fluid Mech.* 209 (1989) 591–615.
- [2] S. Sarkar, C.G. Speziale, A simple non-linear model for the return to isotropy in turbulence, *Phys. Fluids* 84 (1990) 85–95.
- [3] M. Bouzaiane, T. Lili, Réalisabilité d'un schéma non-linéaire de retour à l'isotropie de la corrélation pression-gradient d'un scalaire, *Rev. Gén. Therm.* 37 (1998) 371–383.
- [4] B.E. Launder, G. Reece, W. Rodi, Progress in the development of a Reynolds stress closure, *J. Fluid Mech.* 68 (1975) 537–576.
- [5] T.H. Shih, J.L. Lumley, Modeling of pressure correlation terms in reynolds Stress and scalars flux equation, 1985, Rep F.D. A 85-3 Sibley School of Mechanics and Aerospace, Eng. Cornell Univ.
- [6] T.H. Shih, Second order modeling of passive scalar turbulent flow, Ph.D. Thesis, Cornell University, New York, 1984.
- [7] T.H. Shih, J.L. Lumley, Second order modeling of scalar in turbulent shear flow, in: Center of Turbulent Research 27th Aerospace Meeting, January 9–12, Nevada, 1989.
- [8] T.H. Shih, Constitutives relations and realisability of single-point turbulence closures, in: M. Hallback, D.S. Hennigson, A.V. Johansson, P.H. Alfredsson (Eds.), *Turbulence Transition Modeling*, Dordrecht, 1996.
- [9] B.E. Launder, S.Fu. Tselepidakis, Accomodating the effects of high strain rates in the modeling the pressure strain correlation, 1987, The University of Manchester of Science and Technology, March T.F. D/87/5/.
- [10] T.J. Craft, B.E. Launder, A model for the pressure scalar gradient correlation and its application to homogeneous and inhomogeneous shear flow, *Turbulent Shear Flow* 7, Stanford University, USA, 1989 pp. 12-1–12-6.
- [11] B.E. Launder, Advanced turbulence models for industrial applications, in: M. Hallback, D.S. Hennigson, A.V. Johansson, P.H. Alfredsson (Eds.), *Turbulence Transition Modelling*, Dordrecht, 1996.
- [12] A. Sirivat, Z. Warhaft, The effect of a passive cross-stream temperature and heat flux in grid turbulence, *J. Fluid Mech.* 128 (1983) 323–345.
- [13] J.R. Chasnov, Similarity states of passive scalar transport in isotropic turbulence, *Phys. Fluids* 6 (2) (1994) 1036–1051.
- [14] S. Tavoularis, S. Corrsin, Experiments in nearly homogeneous turbulent shear flow with a uniform mean temperature gradient, *J. Fluid Mech.* 104 (1981) 311–347.
- [15] J.L. Lumley, Computational modeling of turbulent flows, in: *Advances in Applied Mechanics*, Academic Press, New York, 1978, pp. 123–176.
- [16] T.H. Shih, J.L. Lumley, Realisability in second moment turbulence closures revisited (1994), NASA TM 10646.
- [17] J. Bardina, J.F. Ferziger, J.H.W.C. Reynolds, Improved turbulence models based on large-eddy simulation of homogeneous incompressible turbulent flows, Stanford University, Technical Rep. TF-19, 1983.
- [18] M.M. Rogers, N.N. Mansour, W.C. Reynolds, An algebraic model for the turbulent flux of a passive scalar, *J. Fluid Mech.* 203 (1989) 77–101.
- [19] M. Bouzaiane, T. Lili, Étude du comportement asymptotique des grandeurs adimensionnelles en turbulence thermique, in: 14<sup>e</sup> Congrès Français de Mécanique, Toulouse, France, 1999, réf. 5046.
- [20] R. Newman, B.E. Launder, J.L. Lumley, Modeling the behaviour of homogeneous scalar turbulence, *J. Fluid Mech.* 111 (1981) 217–232.
- [21] S.B. Pope, Consistent modeling of scalars in turbulent flows, *Phys. Fluids* 26 (1983) 404–408.
- [22] S.B. Pope, On the relationship between stochastic Lagrangian models of turbulence and second-moment closures, *Phys. Fluid* 6 (2) (1994) 973–985.
- [23] W.P. Jones, P. Musonge, Closure of the stress and scalar flux equation, *Phys. Fluids* 31 (12) (1988) 3589–3604.
- [24] M. Bouzaiane, T. Lili, Études des états d'équilibre d'une turbulence homogène associée à un champ thermique, *J. Internat. Thermique*, Marseille, France 1 (1997) 55–62.
- [25] B.E. Launder, Principles and performance of TCL based second moment closures, Commemorative conference HA MINH THIEU, Toulouse, November, 1999, pp. 1–19.
- [26] S.E. Holt, J.R. Koseff, J.H. Ferziger, A numerical study of the evolution and structure of homogeneous turbulent shear flows, *J. Fluid Mech.* 237 (1992) 499–539.
- [27] T. Gerz, U. Schumann, S.E. Elghobashi, Direct numerical simulation of stratified homogeneous turbulent shear flows, *J. Fluid Mech.* 200 (1989) 563–594.
- [28] M. Bouzaiane, T. Lili, Étude de l'évolution d'un champ thermique soumis aux effets de la gravité, in: Congrès Français de Thermique, Marseille, France, 1998, pp. 53–58.
- [29] F.G. Jacobitz, S. Sarkar, C.W. Van Atta, Direct numerical simulation of the turbulence evolution in a uniformly sheared and stably stratified flow, *J. Fluid Mech.* 342 (1997) 231–261.
- [30] L.H. Shih, J.R. Koseff, J.H. Ferziger, R.C. Rehman, Scaling and parameterization of stratified homogeneous turbulent shear flow, *J. Fluid Mech.* 412 (2000) 1–20.